

Frobenius群（フロベニウス群）に関する 解説

第1章：Frobenius群 F_{20} とは？

数学の「群論」における、**位数20（要素の数が20個）の特定の非可換群**のことです。

もっともイメージしやすい具体的な姿は、「**5で割った余りの世界（有限体 \mathbb{F}_5 ）における、1次関数（アフィン変換）が集まった群**」であり、記号では $AGL(1, 5)$ とも書かれます。

1. どんな要素でできている？（具体的なイメージ）

F_{20} の要素は、高校数学でも馴染みの次のような1次関数の形をしています。ただし、5で割った余りの世界（ $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ）で計算します。

$$f(x) = ax + b \pmod{5}$$

- a の選び方**： $\{1, 2, 3, 4\}$ の **4通り**（0を掛けると1次関数ではなくなるので除きます）
- b の選び方**： $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ の **5通り**

この組み合わせが $4 \times 5 = 20$ 通りあるため、位数が20になります。群の演算は「関数の合成（順番に適用すること）」です。

- 平行移動（ $a = 1$ のとき）**： $f(x) = x + b$ 。これは5つの要素を持ち、群の「核（コア）」になります。
- 拡大縮小（ $b = 0$ のとき）**： $f(x) = ax$ 。これは4つの要素を持ち、原点（0）を固定して数値を変化させる役割を持ちます。

2. 代数的な構造（フロベニウス群の性質）

F_{20} は、2つの巡回群の半直積として表されます。

$$F_{20} \cong \mathbb{Z}_5 \rtimes \mathbb{Z}_4$$

これが「フロベニウス群」と呼ばれるのは、以下の特別な性質（フロベニウスの条件）を満たしているからです。

- フロベニウス核（核）**：位数5の正規部分群（上記の平行移動 $x + b$ の集まり）。単位元（何もしない変換）以外の元は、どの点も固定しません（全員が一斉に動く）。
- フロベニウス補群（補群）**：位数4の巡回部分群（原点を固定する ax の集まり）。

💡 フロベニウス群の面白い特徴

$a \neq 1$ であるような変換（平行移動ではないもの）は、必ず世界のどこか「1点だけ」を固定し、それ以外の点はすべて別の場所に動かすという性質を持っています。この綺麗に統制された動きのルールを持つ群をフロベニウス群と呼びます。

3. 位数20の群の中での立ち位置

位数20の群は、世界に（同型を除いて）5種類しか存在しません。 F_{20} はその中のユニークな1つです。

群の記号	構造	特徴・性質
\mathbb{Z}_{20}	巡回群	可換群（時計の針のような構造）
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10}$	直積群	可換群
D_{20}	二面体群	非可換群（正10角形の対称性・裏返し）
Dic_5	ディクソン群	非可換群（四元数群の親戚のような構造）

F_{20}

フロベニウス群

非可換群 (本記事の対象、 $AGL(1, 5)$)

4. なぜこの群が重要視されるのか？

① ガロア理論 (方程式の解の公式) での主役

5次以上の方程式には一般的な「解の公式」が存在しませんが、「**代数的に解ける (ルートで表せる) 特殊な5次方程式**」も存在します。そのような方程式のガロア群 (根の対称性を表す群) を調べると、この F_{20} や、その部分群 (位数10の二面体群 D_{10} など) がぴったり現れます。

② 群論の教科書的なグッドサンプル

「半直積」や「フロベニウス群」という抽象的で迷子になりやすい概念を、具体的な「 $y = ax + b$ 」という親しみやすい数式で目撃できるため、群論を学ぶ人にとって非常に理解を助けてくれる名脇役なのです。

第2章：Frobenius群 (フロベニウス群) F_n とは？

数学の群論における**フロベニウス群 (Frobenius群)**とは、非常に美しく、かつ厳格な規則を持った「**非可換な置換群**」の一種です。有限集合に対する「要素の並び替え (置換)」の集まりの中で、特定の条件を満たすものを指します。

1. 直感的なイメージと定義

ある集合 (例えば $\{1, 2, 3, \dots, n\}$) を並び替えるルール (群 G) を考えます。この群 G が**フロベニウス群**であるとは、以下の2つの条件を両方満たす場合を言います。

1. 推移的 (Transitive) である

任意の要素を、別の任意の要素へと移すような並び替えルールが必ず存在すること。(全員がどこへでも移動できる)

2. 「2点を固定する並び替え」は単位元 (何もしない) しかない

単位元以外のどんなルールを持ってきても、「**2箇所以上の位置を同時に動かさな**

い（固定する）」ということは絶対にできない。言い換えると、何か1箇所でも位置が変わらない点（不動点）があるルールは、それ以外のすべての点を必ず動かしてしまう。

この「2点以上を固定する要素が存在しない」という強い制限が、フロベニウス群の最大の特徴です。

2. 代数的な構造（核と補群）

フロベニウス群 G は、内部の構造に非常に強力な対称性を持っています。1901年に数学者ゲオルク・フロベニウスが証明した定理により、フロベニウス群は必ず次の2つの部分群に綺麗に分解できることが分かっています。

$$G = K \rtimes H$$

- **フロベニウス核 (Frobenius Kernel) K**

「どの要素も1点すら固定しない（全員を完全に動かす）並び替え」に単位元を加えた集合です。これは必ず G の正規部分群になります。

- **フロベニウス補群 (Frobenius Complement) H**

「特定の1点だけを固定し、残りを動かす並び替え」の集合です。

群全体 G は、この核 K と補群 H の半直積 (\rtimes) という形で作られています。

3. 具体例：アフィン変換群 $AGL(1, q)$

フロベニウス群の最も代表的で分かりやすい例は、有限体 \mathbb{F}_q (q は素数のベキ) 上の1次関数（アフィン変換）の集まりです。

$$f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$$

この変換全体の群を $AGL(1, q)$ と呼びますが、これはフロベニウス群になります。

- **フロベニウス核 K** : $a = 1$ のとき ($f(x) = x + b$: 平行移動)。これは1点も固定せず、全員を一斉にずらします。
- **フロベニウス補群 H** : $b = 0$ のとき ($f(x) = ax$: 拡大縮小)。これは「原点 $x = 0$ 」だけを絶対に動かさず、他の点はすべて動かします。

代表的なサイズ（位数）の例

- F_6 （3次二面体群 $D_6 \cong S_3$ ）

正三角形の対称性の群です。1点を固定する裏返し（補群・位数2）と、1点も固定しない回転（核・位数3）に分解できます。

- F_{20} （位数20のフロベニウス群）

5で割った余りの世界（ \mathbb{F}_5 ）での1次関数 $f(x) = ax + b \pmod{5}$ の集まりです。核の位数が5、補群の位数が4となります。

4. なぜ重要なのか？

① ガロア理論と方程式の可解性

5次以上の方程式には一般的な解の公式ありませんが、「代数的に解ける（べき根で表せる）特殊な方程式」のガロア群を調べると、このフロベニウス群（やその部分群）が頻繁に登場します。方程式の解の「対称性の乱れ方」を綺麗に説明してくれる道具になります。

② 表現論（キャラクター理論）の試金石

フロベニウスがこの群を定義した動機は、彼が創始した「群の表現論（群を行列で表す理論）」にあります。フロベニウス群の性質を使うことで、部分群の指標（キャラクター）を群全体に綺麗に「誘導（インダクション）」できることが証明されており、有限群の構造を解き明かす上で極めて重要なベンチマークとなっています。

第3章： F_{20} の部分群（正規部分群）の証明付き分類

ここでは、生成元と基本関係式を用いて群を定義し、シローの定理（Sylow's theorems）を活用しながら、すべての部分群を漏れなく分類・証明していきます。

1. F_{20} の定義と準備

F_{20} は位数5の巡回群 \mathbb{Z}_5 と位数4の巡回群 \mathbb{Z}_4 の半直積 $\mathbb{Z}_5 \rtimes \mathbb{Z}_4$ として表されます。生成元 a, b を用いると、次のような基本関係式で定義できます。

$$F_{20} = \langle a, b \mid a^5 = 1, b^4 = 1, bab^{-1} = a^2 \rangle$$

- a は位数5の元 (フロベニウス核の生成元)
- b は位数4の元 (フロベニウス補群の生成元)
- 関係式 $bab^{-1} = a^2$ より、群の要素はすべて $a^i b^j$ ($0 \leq i \leq 4, 0 \leq j \leq 3$) の形に一意に表せます。

また、計算の準備として b^2 の性質を確認しておきます。

$$b^2 a b^{-2} = b(bab^{-1})b^{-1} = ba^2 b^{-1} = (bab^{-1})^2 = (a^2)^2 = a^4 = a^{-1}$$

つまり、 $b^2 a = a^{-1} b^2$ となり、これは二面体群と同じ反転の規則を持ちます。

2. 部分群の分類結果まとめ

分類の結論を一覧表で示します。(同型を除いた部分群の「種類」ではなく、群の中に存在する「個数」です)

部分群の位数	同型な群	個数	正規部分群か?	生成元の例
1	自明な群 $\{1\}$	1個	正規	1
2	巡回群 \mathbb{Z}_2	5個	非正規	$a^i b^2$
4	巡回群 \mathbb{Z}_4	5個	非正規	$a^i b$
5	巡回群 \mathbb{Z}_5	1個	正規	a
10	二面体群 D_{10}	1個	正規	a, b^2
20	F_{20} 自身	1個	正規	a, b

合計 **14個** の部分群が存在し、そのうち正規部分群は **4個** です。

3. 分類の証明

ラグランジュの定理より、位数20の群の部分群の位数は 1, 2, 4, 5, 10, 20 のいずれかです。自明な部分群（位数1と20）は常に正規部分群なので省略し、それ以外の位数を詳細に調べます。

① 位数5の部分群（シロー5部分群）

シローの定理を用いて、位数5 (5^1) の部分群の数 n_5 を求めます。

- $n_5 \equiv 1 \pmod{5}$
- $n_5 \mid 4$ ($20 = 4 \times 5$ なので)

これを満たす自然数は $n_5 = 1$ しかありません。

シロー部分群が唯一であることと、それが正規部分群であることは同値です。

したがって、位数5の部分群は $P_5 = \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_5$ の **1個のみ** であり、これは **正規部分群** です。

② 位数4の部分群（シロー2部分群）

同様に、位数4 (2^2) の部分群の数 n_2 を求めます。

- $n_2 \equiv 1 \pmod{2}$ (つまり奇数)
- $n_2 \mid 5$

これを満たすのは $n_2 = 1$ または $n_2 = 5$ です。

もし $n_2 = 1$ だとすると、シロー2部分群も正規部分群となり、 F_{20} は P_5 との直積 $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{20}$ (可換群) になってしまいます。しかし F_{20} は非可換群なので矛盾します。

したがって、 $n_2 = 5$ です。

これらは P_5 の要素 a^i によって共役になるため、 $\langle a^i b a^{-i} \rangle$ と表せます。各シロー2部分群は生成元 b (位数4) を持つため \mathbb{Z}_4 に同型であり、全部で **5個** 存在します (互いに共役なので**非正規**です)。

③ 位数2の部分群

素数位数の部分群なので、位数2の要素を数え上げます。

位数2の要素は、シロー2部分群 ($\cong \mathbb{Z}_4$) の中にしか存在しません。各 \mathbb{Z}_4 は、その中に唯一の位数2の要素 (生成元の2乗) を含みます。

各シロー2部分群の生成元は $a^i b$ の形をしています。これを2乗してみましょう。
関係式 $ba = a^2 b$ を繰り返し使うと、 $ba^i = a^{2i} b$ となります。

$$(a^i b)^2 = a^i b a^i b = a^i a^{2i} b^2 = a^{3i} b^2$$

i が 0 から 4 まで変化するとき、 $3i \pmod{5}$ は 0, 3, 1, 4, 2 とすべて異なる値を取ります。

したがって、位数2の要素は $b^2, ab^2, a^2 b^2, a^3 b^2, a^4 b^2$ のちょうど5個存在します。
これらが生成する $\langle a^i b^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ が、位数2の部分群 **5個** となります（互いに共役なので**非正規**です）。

④ 位数10の部分群

指数 $(20 \div 10)$ が2の部分群は、群論の一般法則として**必ず正規部分群**になります。
ある群 H が F_{20} の位数10の部分群だとします。 H 自身にシローの定理を適用すると、位数5の部分群を唯一持ちます。 F_{20} の位数5の部分群は P_5 しかないため、 **H は必ず $P_5 = \langle a \rangle$ を含みます。**

これにより、 H は P_5 と「位数2の要素」によって生成される必要があります。
上で求めた位数2の要素 b^2 を用いて $\langle a, b^2 \rangle$ を作ると、この位数は10になります。
準備段階で確認した通り $b^2 a b^{-2} = a^{-1}$ を満たすため、これは二面体群 D_{10} と同型です。

（※どの $a^i b^2$ を選んでも、結果的に作られる集合 $\langle a, a^i b^2 \rangle$ は同じ D_{10} に一致します）。

したがって、位数10の部分群は $N_{10} = \langle a, b^2 \rangle \cong D_{10}$ の **1個のみ** であり、**正規部分群** です。

以上の証明から、提示した表の通り、14個の部分群（うち4個が正規部分群）への完全な分類が完了しました。シローの定理と半直積の基本関係式が綺麗に噛み合う、群論の美しい構造です。